

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Penelitian Sebelumnya

Penelitian sebelumnya banyak membahas tentang tegangan sisa yang terjadi pada komponen struktur, diantaranya adalah :

R. Ghfiri, A. Amroche, A. Imad dan G. Mesmacque (2000) dalam tulisannya “*Fatigue Life Estimation after Crack Rrepair in 6005 A-T6 Aluminium Alloy Using the Cold Expansion Hole Technique*”, menjelaskan tentang teknik memperbaiki retakan struktur dengan proses *Hole Drilling* (HD) dan *Cold Expansion* (CE). Proses ini, menimbulkan *Compressive Residual Stress* (tegangan sisa tekan) yang dapat meningkatkan ketahanan terhadap *Fatigue Crack Initiation* (FCI).

Priyo Tri Iswanto, N. Shin Ichi, H. Nobusuke (2002), dalam tulisannya “*Effect of Compressive Mean Stress and Compressive Residual Stress on Fatigue Properties of Stailless Steel SUS304*”, menjelaskan bahwa *Compressive Mean Stress* dan *Compressive Residual Stress* meningkatkan kekuatan fatigue dari spesimen sebesar 425 Mpa dengan pemberian *Compressive Mean Stress* dan *Residual Stress* sebesar -183,75 Mpa. Selain itu, *Compressive Residual Stress* dapat menghambat perambatan retak pada specimen.

V. Nigrelli, S. Pasta (2007) dari Universitas Palermo dalam jurnalnya “*Finite Element Simulation of Residual Stress Induced by Split-Sleeve Cold Expansion Hole Process of Hole*”, memberikan gambaran bahwa *Split-Sleeve Cold Expansion Hole Process* di modelkan tiga dimensi untuk mengetahui tegangan sisa yang terjadi dengan menggunakan *software* DEFORM™. Dalam *software* ini permodelan perhitungan tegangan sisa yang terjadi menggunakan *lagrangian implicit code* yang biasanya dipakai dalam pembentukan logam. Hasil dari penelitian ini adalah tegangan sisa terjadi pada daerah lubang berupa *compressive residual stress* (tegangan sisa tekan). Hasil tegangan sisa tekan tersebut hampir sama dengan penyelesaian menggunakan *analytical solution* yang dikembangkan oleh Guo.

#### 2.2 Analisis Tegangan

##### 2.2.1 Tegangan

Tegangan adalah suatu ukuran intensitas pembebanan yang dinyatakan oleh gaya dan dibagi oleh luas di tempat gaya tersebut bekerja (Iremonger, 1990). Secara matematis dirumuskan sebagai berikut :

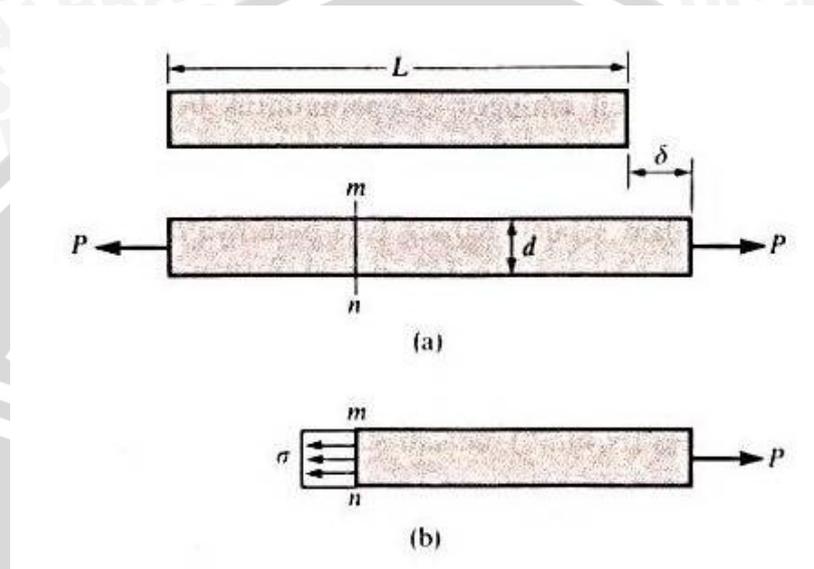
$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2-1)$$

Keterangan :  $\sigma$  adalah besarnya tegangan (Pascal)

F adalah besarnya gaya yang bekerja (N)

A adalah luas penampang ( $m^2$ )

Pada kasus sederhana, dapat ditunjukkan oleh sebuah batang yang panjangnya L, kemudian diberikan gaya aksial pada batang tersebut sehingga terjadi pertambahan panjang ( $\delta$ ) seperti pada gambar 2.1 berikut :

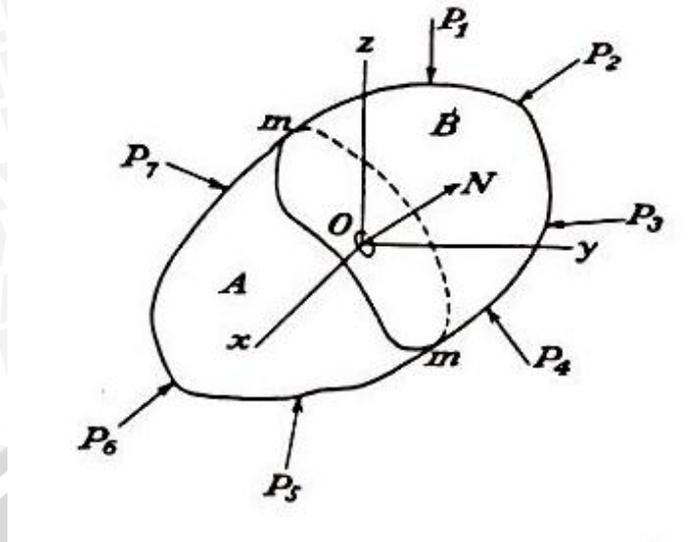


Gambar 2.1 Batang yang diberi gaya aksial (P) pada ujungnya

Sumber : Gere, 1996 : 3

Untuk menyelidiki tegangan internal yang terjadi, maka dibuat potongan mn. Kemudian batang yang sudah di potong tersebut dipisahkan menjadi sebuah *free body*. Gaya aksial P bekerja pada satu sisi, sedangkan sisi yang lain timbul gaya aksi dari batang yang dipotong. Gaya tersebut terdistribusi merata di sepanjang permukaan batang yang besarnya sama dengan intensitas  $\sigma$  dikalikan luas penampang. Resultan gaya P besarnya sama dengan aksi dari batang tersebut tetapi arahnya berlawanan.

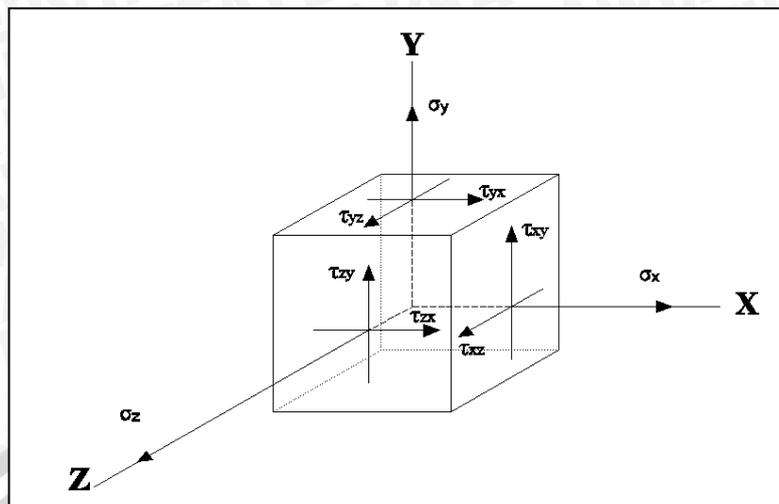
Pada kasus umum tegangan tidak terbagi merata di sepanjang potongan penampang. Hal ini bisa dilihat pada gambar 2.2 berikut :



Gambar 2.2 Benda padat yang diberi gaya dari berbagai arah  
Sumber : Timoshenko, 1986 : 2

Dari gambar 2.2 di atas, tegangan tidak terbagi merata sepanjang mm. Untuk memperoleh besar gaya yang bekerja pada luasan kecil  $\delta A$ , misalnya dari potongan penampang mm pada titik O sebarang, kita amati bahwa gaya yang bekerja pada elemen luas ini diakibatkan oleh kerja bahan bagian B terhadap bahan bagian A yang dapat diubah menjadi resultan  $\delta P$ . Apabila terus ditekan luas elemen  $\delta A$ , harga batas ratio  $\delta P / \delta A$  menghasilkan besar tegangan yang bekerja pada potongan penampang mm pada titik O.

Tegangan juga dapat terjadi pada suatu bidang. Tegangan yang terjadi adalah tegangan normal dan tegangan geser di semua permukaannya. Hal ini dapat ditunjukkan pada gambar 2.3 berikut ini :



Gambar 2.3 Tegangan pada bidang kubus  
Sumber : Gere, 1996 : 349

Penulisan tegangan pada suatu titik dapat dilakukan dengan penulisan tensorial dengan matrik sebagai berikut :

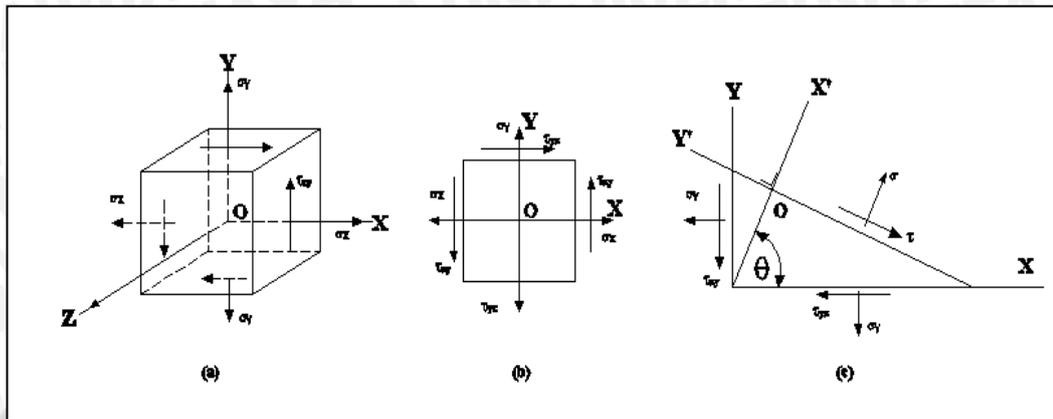
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

Arti dari penulisan tersebut adalah indeks pertama menyatakan bidang tempat tegangan tersebut bekerja, dan indeks kedua menyatakan arah tegangan tersebut. Tegangan dengan indeks pertama dan kedua sama merupakan tegangan normal, sedangkan yang indeksnya berlainan merupakan tegangan geser. Tegangan normal berharga positif, bila merupakan tegangan tarik dan bertanda negatif bila merupakan tegangan kompresi. Untuk tegangan geser berharga positif bila mempunyai kecenderungan memutar elemen kubus searah jarum jam dan bertanda negatif bila cenderung memutar elemen kubus berlawanan arah jarum jam.

Dalam menganalisa tegangan maka kita akan menjumpai istilah tegangan prinsipal, tegangan prinsipal adalah tegangan yang bekerja pada daerah prinsipal dimana tegangan geser berharga nol dan hanya tegangan normal saja yang bekerja. Arah tegangan utama disebut arah prinsipal.

Untuk titik yang mendapat tegangan dua dimensi, artinya  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  maka sumbu prinsipal ketiga dianggap berhimpit dengan sumbu  $z$  dan dengan demikian harga tegangan ke arah sumbu prinsipal ketiga akan sama dengan tegangan ke arah sumbu  $z$  yang berharga nol ( $\sigma_3 = \sigma_z = 0$ ). Hal ini dapat digambarkan seperti pada

gambar (2.4.a) dan dapat disederhanakan lagi menjadi seperti pada gambar (2.4.b). Jika sumbu xy diputar terhadap sumbu z sebesar sudut  $\theta$  dan melalui titik O dibuat bidang oblique ( bidang miring sembarang) yang mempunyai normal n (sama dengan arah  $x'$ ) seperti pada gambar (2.4.c).



Gambar 2.4 Menentukan tegangan Prinsipal  
Sumber: Timoshenko, 1986: 306

Maka tegangan normal ( $\sigma_{x'}$ ) di bidang *oblique* didapatkan sebagai berikut :

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2-3)$$

Sedangkan tegangan geser ( $\tau_{x'y'}$ ) di bidang *oblique* didapatkan

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta \quad (2-4)$$

Persamaan di atas juga sering ditulis dengan sudut  $2\theta$  sehingga :

$$\sigma'_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2-5)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2-6)$$

Untuk mencari arah tegangan prinsipal maka sesuai definisi di atas bahwa tegangan gesernya harus sama dengan nol maka dari persamaan (2-6) didapatkan :

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (2-7)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{1/2 \sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{1}{2} \tan 2\theta \quad (2-8)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2-9)$$

Persamaan (2-9) bila dianalogikan dengan suatu segitiga dan dalil pythagoras maka :

$$\sin 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}} \quad (2-10)$$

$$\cos 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y / 2}{\left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}} \quad (2-11)$$

Harga – harga ini disubstitusikan ke persamaan (2-5) dan (2-6) sehingga didapatkan tegangan prinsipal sebagai berikut :

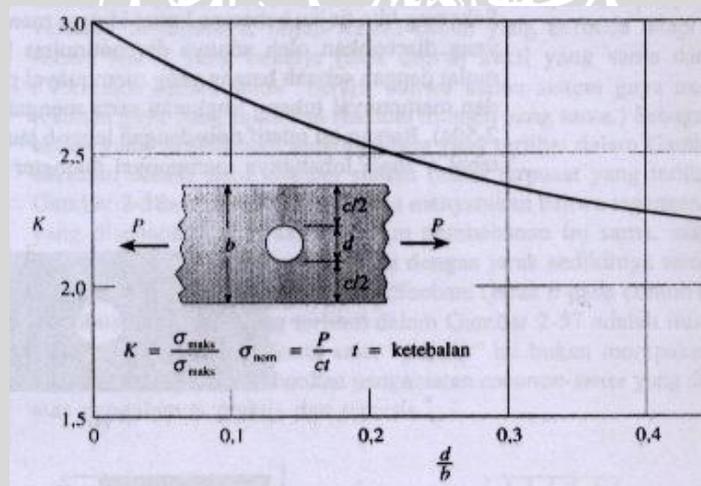
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \pm \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (2-12)$$

### 2.2.2 Konsentrasi Tegangan

Pemusatan tegangan terjadi seiring adanya bentuk yang tidak teratur dari bahan. Pada pelat berlubang, tegangan normal yang bekerja pada potongan melintang potongan Faktor pemusatan tegangan (*stress concentration factor*) dipakai untuk menghubungkan tegangan maksimum sebenarnya pada ketidak-mulusan tersebut terhadap tegangan nominal (E. Shigley, 1986). Faktor tersebut dinyatakan dengan persamaan :

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (2-13)$$

Pada pelat berlubang faktor konsentrasi tegangan dapat dilihat pada gambar grafik 2.5 di bawah ini:



Gambar 2.5 Faktor konsentrasi tegangan pada pelat berlubang  
Sumber: Gere, 1996:126

### 2.3 Regangan

Regangan adalah perubahan bentuk tanpa dimensi untuk menyatakan adanya deformasi (Iremonger, 1990 : 17). Regangan terjadi karena adanya gaya dari luar baik berupa gaya tarik ataupun gaya tekan. Regangan yang ditimbulkan dari gaya tarik disebut *tensile strain* sedangkan regangan yang ditimbulkan oleh gaya tekan disebut *compressive strain*. Karena regangan adalah perbandingan antara dua ukuran panjang,

maka regangan tidak memiliki dimensi (*dimension less quantity*). Regangan karena gaya tarik dapat ditulis dalam persamaan berikut :

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (2-14)$$

Keterangan :  $\varepsilon$  adalah besarnya regangan

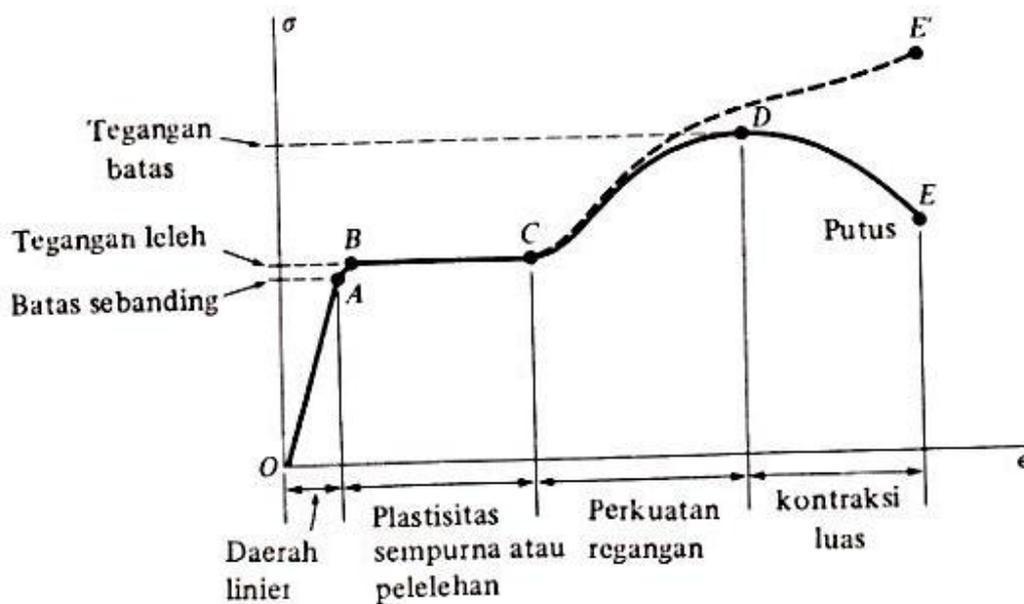
$\delta$  adalah besarnya pertambahan panjang (m)

L adalah panjang awal (m)

#### 2.4 Kekuatan Tarik

Kekuatan tarik adalah kemampuan bahan untuk menerima beban tarik tanpa mengalami kerusakan dan dinyatakan sebagai tegangan maksimum sebelum patah. Tegangan maksimum sebelum putus dianggap sebagai data terpenting yang diperoleh dari hasil pengujian tarik, karena biasanya perhitungan-perhitungan kekuatan dihitung atas dasar kekuatan tarik.

Dari hasil pengujian kekuatan tarik, dapat dibuat diagram hubungan antara tegangan dan regangan. Gambar 2.6 di bawah ini adalah diagram tegangan dan regangan untuk material baja karbon rendah.



Gambar 2.6 Diagram tegangan regangan baja karbon rendah

Sumber : Gere, 1996 : 13

Diagram tersebut dapat menjelaskan beberapa titik penting, diantaranya adalah :

Titik A adalah *proporsional limit point*, yaitu titik batas antara tegangan dan regangan masih dalam keadaan proporsional atau linier. Pada daerah ini berlaku Hukum Hooke yang menyatakan pertambahan tegangan sebanding dengan pertambahan regangan. Daerah ini dinamakan daerah elastis, yaitu daerah yang jika diberikan gaya dari luar kemudian gaya dihilangkan maka akan kembali ke bentuk semula. Di bawah ini adalah modulus elastis dari berbagai bahan.

Tabel 2.1. Modulus elastisitas berbagai jenis logam

Material	Elastic Modulus $E$ , GPa ( $10^3$ ksi)		Poisson's Ratio $\nu$
<i>(a) Metals</i>			
Aluminum	70.3	(10.2)	0.345
Brass, 70Cu-30Zn	101	(14.6)	0.350
Copper	130	(18.8)	0.343
Iron; mild steel	212	(30.7)	0.293
Lead	16.1	(2.34)	0.44
Magnesium	44.7	(6.48)	0.291
Stainless steel, 2Ni-18Cr	215	(31.2)	0.283
Titanium	120	(17.4)	0.361
Tungsten	411	(59.6)	0.280

Sumber : Dowling, 1998 : 178

Titik B adalah *yield point*, yaitu titik yang menyatakan batas antara daerah elastis dan plastis. Material akan menjadi plastis sempurna ketika sudah mencapai titik C. Apabila dilakukan pemberian gaya terus dari luar maka material akan mengalami *strain hardening* sampai pada titik *ultimate*, yaitu titik D.

Titik D adalah *ultimate point*, yaitu titik yang menunjukkan tegangan suatu bahan mencapai tegangan tertingginya. Jika tegangan terus ditambah maka bahan akan putus sampai titik patahnya (titik E). Garis putus-putus merupakan diagram tegangan regangan sejati yang menggunakan luas sebenarnya.

Pada daerah plastis, Hukum Hooke sudah tidak berlaku lagi. Persamaan yang digunakan untuk mencari tegangan pada daerah plastis adalah sebagai berikut:

$$\sigma = K\varepsilon^n \quad (2-15)$$

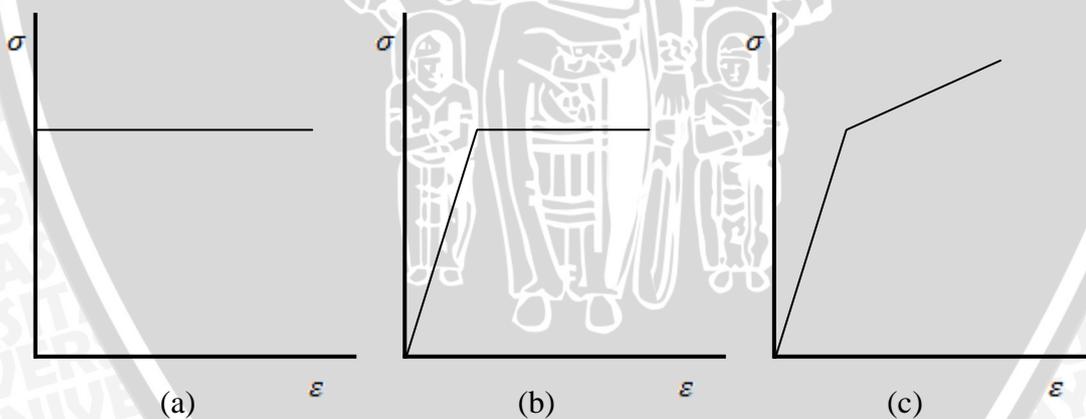
dengan  $\sigma$  adalah tegangan

$K$  adalah konstanta penguatan

$\varepsilon$  adalah regangan

$n$  adalah eksponensial *strain hardening*

Dalam analisa untuk mendapatkan penyelesaian masalah deformasi, maka perlu untuk mengidealisasikan hubungan tegangan-regangan yang terjadi. Pada umumnya ada tiga permodelan pengidealisasiian dari sudut pandang terjadinya deformasi pada material, yang pertama adalah *rigid perfectly plastic*, pada pemodelan ini material tidak mengalami deformasi elastis terlebih dahulu, namun langsung mengalami deformasi plastis pada saat diberi pembebanan sampai batas tertentu. Deformasi akan terus terjadi jika pembebanan terus dilakukan walaupun besar pembebanan tidak ditambahkan. Pada kurva diagram tegangan–regangan permodelan material ini dapat dilihat pada gambar 2.9 (a) Untuk material logam sendiri biasanya tergolong material yang *elasto-plastic*, yang mana pada material terjadi dua macam deformasi yaitu deformasi elastis dan deformasi plastis. Pada material jenis ini permodelan yang digunakan adalah jenis (b) dan (c), yaitu *elastis perfectly plastic* dan *elastis linier strain hardening*. Pada permodelan ini material akan mengalami deformasi elastis terlebih dahulu selama diberi pembebanan sampai batas tertentu, kemudian akan mengalami deformasi plastis. Untuk *elastis perfectly plastic*, deformasi plastis yang terjadi tidak diikuti penguatan tegangan sedangkan *elastis linier strain hardening*, deformasi plastis yang terjadi akan diikuti dengan penguatan tegangan. Berikut adalah gambar kurva tegangan-regangan berbagai macam permodelan material:

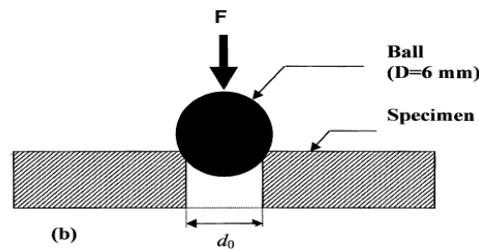


Gambar 2.7 Permodelan material pada diagram tegangan-regangan  
Sumber : Dieter, 1988 : 72

## 2.5 Cold Expansion Hole

*Cold expansion hole* adalah salah satu teknik yang digunakan untuk menghasilkan *compressive residual stress* pada permukaan lubang sambungan plat. Bola baja atau mandrel dengan kekuatan tinggi ditekan pada plat sampai

mengalami deformasi plastis local pada permukaannya. Proses *cold expansion hole* ditunjukkan pada gambar di bawah ini :



Gambar 2.8 Proses *cold expansion hole*  
Sumber: R. Ghfiri, 2000:913

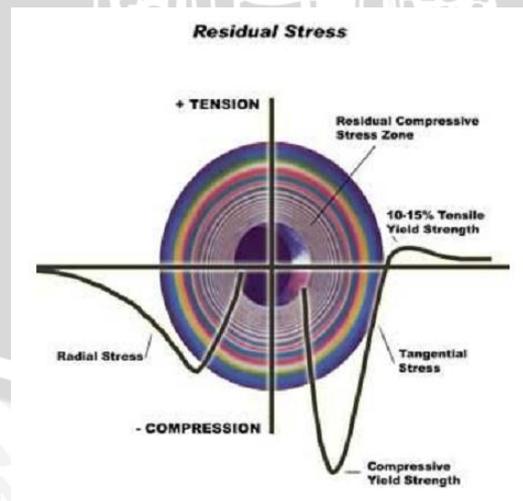
Pada proses *cold expansion hole*, tercipta daerah yang dinamakan *cold expansion affected zone* (CEAZ). Daerah ini mengalami deformasi plastis dan pada daerah itu terdapat *compressive residual stress*. Besarnya CEAZ dipengaruhi oleh *mechanical properties* material yang digunakan dan *degree of cold expansion* (DCE) yang besarnya dapat di hitung dengan persamaan berikut :

$$DCE = [(D-d_0)/d_0] \times 100\% \quad (2-16)$$

Keterangan : D adalah diameter bola (mm)

D0 adalah diameter lubang sebelum *cold expansion hole* (mm)

Distribusi tegangan yang terjadi pada proses *cold expansion hole* dapat dilihat pada gambar di bawah ini :



Gambar 2.9 Distribusi tegangan pada proses *cold expansion hole*  
Sumber : Shanmukha, 2006 : 3

Dari gambar 2.9 di atas dapat diketahui bahwa hasil proses *cold expansion hole* menghasilkan tegangan sisa tekan kemudian berubah menjadi tegangan sisa tarik ketika semakin jauh dari lubang. Daerah yang terjadi tegangan sisa tekan merupakan daerah yang diinginkan karena daerah ini yang akan melawan tegangan dari luar. Sedangkan tegangan sisa tarik adalah hasil yang merugikan, karena tegangan tersebut akan menambah tegangan dari luar komponen.

## 2.6 Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga merupakan prosedur numerik untuk memperoleh solusi permasalahan yang ditemukan analisa teknik. Konsep dasar MEH adalah membagi struktur menjadi elemen-elemen yang lebih kecil dengan dimensi berhingga, sedangkan struktur asli dianggap sebagai assembly dari elemen hingga tersebut. Berdasarkan konsep dari Metoda Elemen Hingga, yaitu proses diskretisasi, maka suatu sistem akan dibagi-bagi menjadi elemen-elemen yang lebih kecil. Ada berbagai jenis elemen yang dapat dipakai dan dipilih berdasarkan jenis struktur dan keperluannya. Secara garis besar, elemen dibagi menjadi:

1. Elemen satu dimensi
2. Elemen dua dimensi
3. Elemen selaput (shell)
4. Elemen tiga dimensi

Masing-masing jenis elemen diatas masih dapat dikembangkan lagi menurut kebutuhan, antara lain jenis struktur dan ketelitian yang diinginkan.

### A. Elemen Satu Dimensi

Elemen satu dimensi dapat dipakai dalam berbagai jenis keperluan. Misalnya untuk menganalisa sebuah portal atau rangka batang rata dan lain lain yang akan dibahas tersendiri.

Elemen satu dimensi ini dapat dibagi menjadi dua, yaitu:

- a) Elemen batang, digunakan bila peralihan yang terjadi hanya menurut satu koordinat.
- b) Elemen balok, digunakan bila elemen berbentuk balok dengan 3 translasi dan 3 rotasi pada tiap titik nodalnya.

### B. Elemen Dua Dimensi

Menurut bidang pernbeganannya, maka elemen dua dimensi dibagi menjadi:

- a) Elemen bidang, bila beban terletak pada bidang elemen (*in-place loading*), sehingga peralihan terjadi pada bidangnya.

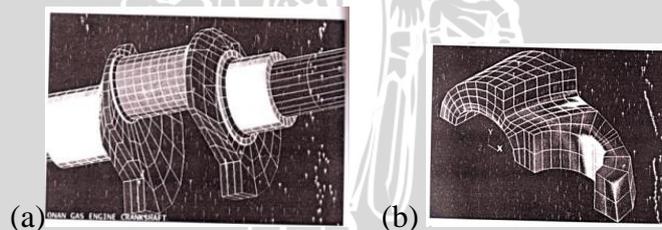
b) Elemen Pelat, bila beban tegak lurus bidang elemen (*face loading*), sehingga peralihan yang terjadi akan keluar bidang elemen.

Bentuk paling sederhana dari elemen dua dimensi ini adalah elemen segitiga dengan tiga titik nodal, kemudian elemen segiempat dengan empat titik nodal. Bila dikehendaki ketelitian yang lebih tinggi, maka jumlah titik nodal tiap elemen dapat ditingkatkan dan juga dibuat elemen isoparametrik.

### C. Elemen Selaput [Shell]

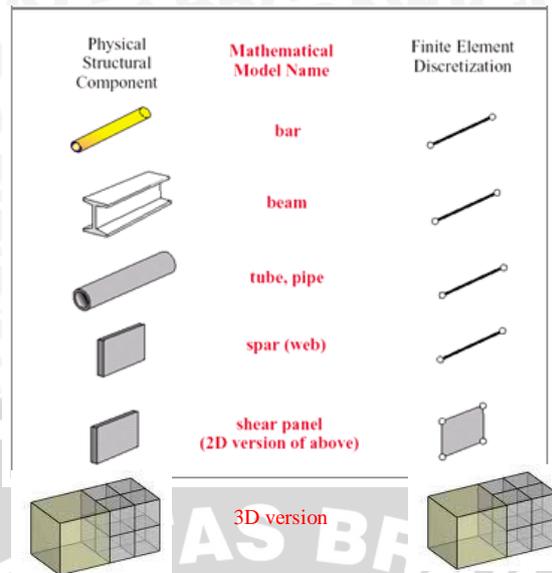
Elemen ini mempunyai sebuah arah ukuran yang jauh lebih kecil dibandingkan dengan ukuran dua arah lainnya, baik untuk beban pada bidangnya maupun beban tegak lurus bidangnya. Dan bidang elemen ini dapat tidak rata atau rata seperti pada elemen bidang atau elemen pelat.

Berkembangnya metode numerik yang didukung oleh kemampuan komputasi ternyata makin menjadi alternatif dalam menyelesaikan kasus-kasus *engineering*. Salah satunya adalah metode elemen hingga yang merupakan solusi numerik dengan proses diskretisasinya, yaitu membagi struktur menjadi elemen-elemen kecil yang memiliki geometri yang lebih sederhana dengan jumlah yang masih berhingga. Metode ini digunakan terutama untuk penyelesaian yang menyangkut dimensi benda yang tidak teratur dan pembebanan kompleks. Tujuan utama penggunaan metode ini adalah untuk memperoleh nilai pendekatan tegangan dan perpindahan yang terjadi pada suatu struktur.



Gambar 2.10 (a) *Gas engine crankshaft*, (b) *joy swivel link*  
Sumber : Zahavi, 1992

Pemakaian Metode Elemen Hingga (MEH) selama ini antara lain untuk menganalisa struktur, yang berada pada pengaruh pembebanan (gaya maupun tekanan), gradien temperatur yang akan memberikan akibat berupa deformasi, tegangan maupun perubahan temperatur yang dialami oleh struktur tersebut. Tujuan utama dari analisa ini adalah untuk memperoleh nilai pendekatan tegangan dan perpindahan yang terjadi pada struktur tersebut.



Gambar 2.11 Diskretisasi Elemen

Sumber : Modul ANSYS 2009, Studio Perancangan dan Rekayasa Sistem

### Prosedur perhitungan dengan Metode Elemen Hingga (MEH)

#### 1. Diskretisasi dan pemilihan elemen

Proses ini adalah proses pembagian struktur menjadi elemen-elemen kecil yang lebih sederhana yang dihubungkan pada titik simpul (*node*), kemudian dilakukan pemilihan elemen seperti model awal dari struktur. Hal ini dilakukan untuk mempermudah analisa.

#### 2. Memilih fungsi pendekatan

Variasi perpindahan pada suatu elemen didekati dengan fungsi interpolasi yang didasarkan pada harga simpul yang mengitari. Fungsi yang paling umum digunakan adalah polinomial. Pendekatan dengan fungsi interpolasi ini disebabkan karena sulitnya mencari jawaban tertutup sehingga dipilih suatu bentuk jawaban, yaitu distribusi perpindahan yang merupakan besaran yang tidak diketahui dengan memakai fungsi yang harus memenuhi hukum, prinsip dan syarat batas yang menjadi sifat persoalan yang ada.

#### 3. Menurunkan persamaan matrik kekakuan [k]

Dengan prinsip usaha virtual akan dihasilkan persamaan matrik kekakuan elemen yang dinyatakan sebagai berikut :

$$[k] = \int [B]^T [C] [B] dV \quad (2-17)$$

dimana:

[k] : matrik kekakuan elemen

[B] : matrik konstitutive hubungan regangan dan perpindahan

[C] : matrik konstitutive hubungan tegangan dan regangan material

Adapun matrik B untuk elemen tetrahedral adalah sebagai berikut :

$$B_1 = \begin{bmatrix} f_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & f_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & f_{iz} \\ f_{iy} & f_{ix} & 0 \\ 0 & f_{iz} & f_{iy} \\ f_{iz} & 0 & f_{ix} \end{bmatrix}$$

#### 4. Menghitung matrik beban total

Beban yang bekerja didefinisikan menjadi 3 macam, sehingga beban total adalah :

$$R = Q_{NF} + Q_{BF} + Q_T \quad (2-18)$$

dimana:

$Q_{NF}$  : beban pada konsentrasi nodal

$Q_{BF}$  : beban *body force* (akibat beban sendiri)

$Q_T$  : beban traksi (*surface traction*)

#### 5. Merakit elemen menjadi struktur

Perakitan persamaan elemen akan dibawa ke bentuk persamaan global, yang prosesnya harus memenuhi sifat konvergen dan sifat sinambung. Salah satunya antara lain : titik-titik yang semula bersebelahan harus tetap bersebelahan satu sama lain setelah elemen dikenai beban. Bentuk persamaan global elemen yaitu :

$$[K] \{q\} = \{R\} \quad (2-19)$$

dimana:

[K] : matrik kekakuan elemen.

{q} : vektor perpindahan simpul.

{R} : matrik beban total.

Setelah matrik kekakuan global diperoleh dan syarat-syarat batasnya dimasukkan maka perpindahan simpul (q) dapat dicari. Suatu syarat batas memberikan informasi bagaimana struktur ditopang dalam ruang, dengan memasukkan nilai perpindahan yang telah ditetapkan sesuai kondisi pada struktur.

#### 6. Mendapatkan perpindahan global

Persamaan global yang telah mendapatkan syarat batas, merupakan sekumpulan persamaan linier yang secara umum dapat ditulis sebagai berikut :

$$k_{1,1} q_1 + k_{1,2} q_2 + \dots + k_{1,n} q_n = R_1 \quad (2-20)$$

$$k_{2,1} q_1 + k_{2,2} q_2 + \dots + k_{2,n} q_n = R_2$$

.....

$$k_{n,1} q_1 + k_{n,2} q_2 + \dots + k_{n,n} q_n = R_n$$

Persamaan di atas akan diselesaikan dengan cara eliminasi Gauss untuk mendapatkan besaran-besaran primer yaitu  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ .

#### 7. Mendapatkan besaran sekunder dan interpretasi hasil

Dari besaran pertamanya yang berupa perpindahan, dapat dicari besaran sekunder yang dapat berupa tegangan maupun regangan, dengan menggunakan hubungan antara keduanya. Hubungan tegangan-regangan pada kondisi 3D dapat dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2-21)$$

Hubungan tersebut dapat ditulis dalam bentuk simbol berikut :

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\}$$

Hubungan regangan dengan perpindahan adalah :

$$\{\epsilon\} = [B] \{d\}$$

Sehingga tegangan dapat dirumuskan sebagai :

$$\{\sigma\} = [C] [B] \{d\}$$

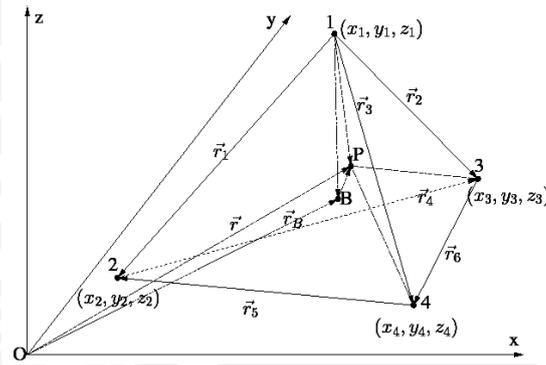
Hasil akhir dari perhitungan dengan metode elemen hingga ini berupa harga distribusi tegangan yang akan diplot di sepanjang struktur untuk dianalisis sesuai dengan rumusan masalah yang ada.

Analisa elemen hingga pada dasarnya dikembangkan untuk kondisi 2-D (*plane stress*). Struktur 3-D menyebabkan penambahan persamaan berganda dalam jumlah besar, tetapi dengan menggunakan elemen dengan orde lebih tinggi dan komputer yang lebih cepat, maka masalah tersebut dapat diatasi oleh metode elemen hingga.

Macam – macam bentuk Elemen solid 3-D pada Elemen Hingga:

#### 1. Elemen *Tetrahedral*

Elemen *tetrahedral* didefinisikan dalam tiga sumbu koordinat,  $x, y, z$ , sehingga memiliki tiga komponen perpindahan yaitu  $u, v, w$ . Skema elemen *tetrahedral* dalam sumbu koordinat dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

Gambar 2.12 Elemen *Tetrahedral*

Sumber : A. Nentchev. *Numerical Analysis and Simulation in Microelectronics by Vector Finite Elements*

Untuk mendapatkan volume *tetrahedral*,  $V$ , maka dengan menggunakan fungsi determinan dari matriks *tetrahedral*.

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (2-22)$$

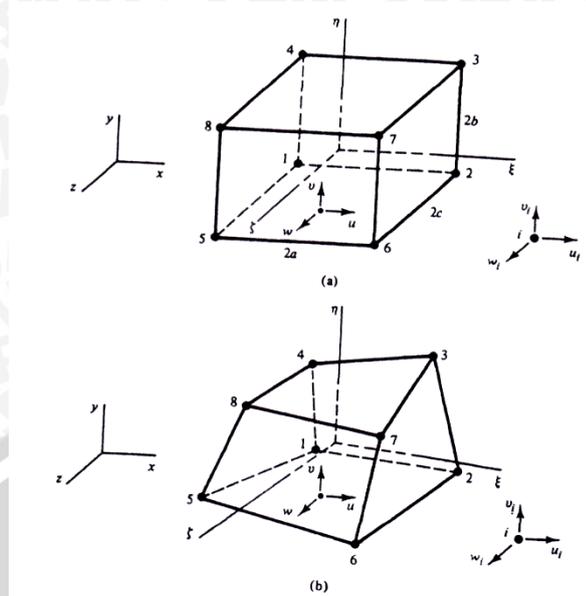
Persamaan di atas akan menghasilkan nilai dari volume *tetrahedral*. Persamaan di atas juga akan diselesaikan dengan menggunakan kofaktor dari determinan matriks tersebut, sehingga diperoleh nilai dari  $a_i, b_i, c_i, d_i$  sebagai komponen untuk memperoleh besarnya perpindahan dengan menggunakan persamaan :

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \quad (2-23)$$

Dengan menggunakan persamaan tersebut, akan diperoleh besarnya perpindahan sebagai besaran primer. Hasil akhir dari perhitungan dengan metode elemen hingga ini berupa harga distribusi tegangan yang akan diplot di sepanjang struktur untuk dianalisis sesuai dengan rumusan masalah yang ada. (R.L. Taylor. 2000)

## 2. Elemen *Heksahedron*

Elemen *Heksahedron* didefinisikan dalam tiga sumbu koordinat,  $x, y, z$  sehingga memiliki tiga komponen perpindahan yaitu  $u, v, w$ . Skema elemen *Heksahedron* dalam sumbu koordinat dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 2.13 Elemen *Heksahedron* (a) Elemen Pejal Segiempat Induk. (b) Pasangan Isoparametriknya

Sumber: Elemen Hingga Untuk Analisa Struktur, 1989

Hubungan antara regangan - peralihan dapat lebih disederhanakan menjadi:

$$\epsilon_i = B_i q_i \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (2-24)$$

Dimana :

$$B_i = d f_i = \begin{bmatrix} f_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & f_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & f_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 & 0 \\ 0 & D_{G2i} & 0 \\ 0 & 0 & D_{G3i} \end{bmatrix}$$

Sehingga dari hubungan antara regangan dan peralihan dapat dieliminasi sehingga akan mendapatkan tegangan dan regangan dalam metode elemen hingga.

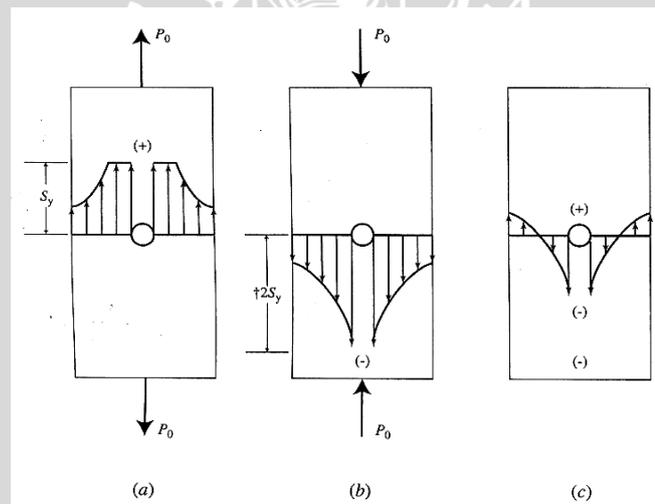
Analisis proses *Cold Expansion Holes* dengan menggunakan metode elemen hingga termasuk dalam jenis analisis geometri *nonlinier*. Analisis ini melibatkan perpindahan, tegangan, dan rotasi yang besar pada elemen dengan tujuan akhir adalah menentukan posisi ekuilibrium dan konfigurasi dari elemen. Rumusan dasar yang digunakan adalah formulasi Lagrangian dengan menentukan prinsip usaha virtual.

## 2.7 Tegangan Sisa

Ada berbagai teknik yang digunakan dalam pembentukan tegangan sisa pada suatu struktur. Secara umum dibagi menjadi empat cara, yaitu cara mekanik, pelapisan, *thermal method*, dan proses permesinan. Cara tersebut hampir dipakai pada semua logam tinggal memilih cara yang paling cocok untuk kondisi logam.

Tegangan sisa ini dapat merugikan tetapi juga dapat menguntungkan. Jika terdapat tegangan sisa tarik pada material yang mengalami beban tarik maka akan memberikan resultan positif dan jika melewati tegangan luluhnya akan menjadi awal mula terjadinya patahan, sebaliknya jika beban berupa tegangan tarik dan terdapat tegangan sisa tekan pada material maka tegangan sisa ini akan memberi resultan negatif mengurangi efek beban ke material.

Contoh pembentukan *compressive residual stress* dengan cara mekanik, yaitu dengan memberi beban pada material sampai terbentuk deformasi plastis pada daerah lokal.



Gambar 2.14 Tegangan sisa yang terjadi pada pelat berlubang  
Sumber: Stephens, 2001:248

Gambar tersebut adalah *stretching (tensile overload)* dari sebuah pelat berlubang. Dengan mengansumsikan material pelat *elastis-perfectly plastic* pada gambar (a) dapat dilihat distribusi tegangan yang terjadi pada saat pembebanan tarik dilakukan, karena ada perubahan penampang maka pada daerah sekitar lubang akan terjadi konsentrasi tegangan sehingga tegangan pada daerah sekitar lubang menjadi besar dan terjadi deformasi plastis. Pada gambar (b) beban pada pelat diganti tegangan tekan sehingga apabila dilakukan superposisi akan tampak seperti pada gambar (c).

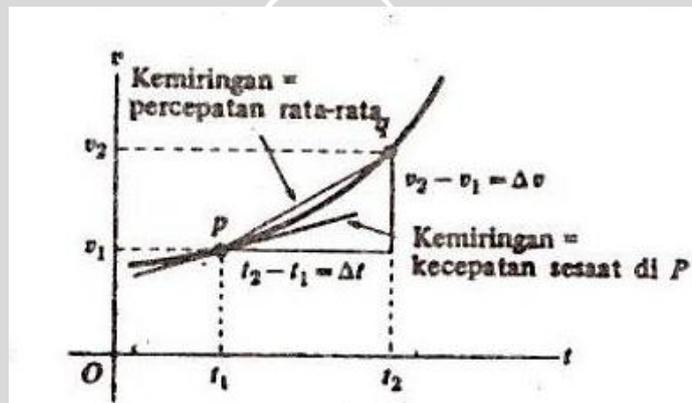
## 2.8 Analisis Kecepatan

### 2.8.1 Kecepatan Rata-Rata

Kecepatan merupakan ukuran yang menyatakan perubahan posisi benda terhadap waktu. Kecepatan merupakan besaran vektor, yang memiliki harga dan arah. Sedangkan kecepatan rata-rata adalah hasil perbandingan perpindahan dengan waktu sehingga dapat ditulis dengan persamaan :

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2-25)$$

Kecepatan rata-rata dapat ditunjukkan dengan gradien grafik perpindahan terhadap waktu yang ditunjukkan pada gambar dibawah ini :



Gambar 2.15 Grafik hubungan antara kecepatan dan waktu  
Sumber : Zemansky, 1982 : 65

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa pada saat  $t_1$ , partikel berada pada titik P, dengan kordinat  $x_1$  sedangkan pada saat  $t_2$  partikel berada pada titik Q yang kordinatnya  $x_2$ . Dengan demikian kecepatan rata-rata dari titik P ke titik Q dapat ditulis:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2-26)$$

Ketika  $t_1 = 0$  dan  $t_2$  sembarang waktu  $t$ , berarti  $x_0$  merupakan posisi awal pada saat  $t_0$ . Dengan demikian persamaan dapat ditulis :

$$x - x_0 = \bar{v}t \quad (2-27)$$

Karena  $x_0 = 0$ , maka persamaan di atas dapat ditulis :

$$x = \bar{v}t \quad (2-28)$$

### 2.8.2 Kecepatan Sesaat

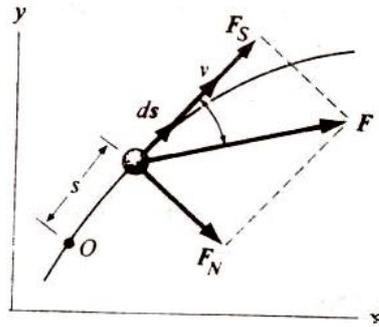
Kecepatan sesaat adalah perubahan posisi benda pada suatu waktu tertentu. Dengan kata lain kecepatan sesaat adalah kecepatan suatu partikel pada satu saat atau pada satu titik lintasannya. Misalnya untuk menentukan kecepatan sesaat di titik P pada gambar (2.10). Kecepatan rata-rata antara P dan Q ada hubungannya dengan seluruh perpindahan dan seluruh selang waktu. Ketika titik Q diambil makin dekat dengan titik P, maka kecepatan rata-rata dihitung untuk perpindahan dan selang waktu yang makin pendek. Apabila perpindahan sangat kecil, maka selang waktu untuk membanginya menjadi sangat kecil pula, tetapi hasil baginya belum tentu berupa besaran yang kecil. Kecepatan sesaat dapat ditunjukkan dengan rumus sebagai berikut:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \quad (2-29)$$

Pada gambar (2.10) miring tali busur pq sama dengan garis singgung pada garis lengkung di titik P. Hal ini menunjukkan bahwa kecepatan sesaat di setiap titik pada kordinat-waktu sama dengan miring garis singgung. Ketika garis singgung tersebut ke kanan dan ke atas, maka kecepataannya positif. Sedangkan jika garis singgung itu ke kanan dan ke bawah, maka kecepataannya negatif. Apabila garis singgung tersebut horisontal maka kecepataannya sama dengal nol.

### 2.9 Energi Kinetik

Energi kinetik merupakan energy yang ditimbulkan karena adanya gerakan dari suatu benda yang mempunyai kecepatan ( $v$ ) dan massa ( $m$ ). Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada gambar 2.11 di bawah ini:



Gambar 2.16 Lintasan sebuah partikel pada bidang x-y  
Sumber : Zemansky, 1982 : 155

Berdasarkan hukum kedua Newton maka :

$$Fs = m \frac{dv}{dt} \quad (2-30)$$

Karena  $F_s$  merupakan fungsi dari  $s$ , sehingga dapat digunakan dalil rantai sehingga persamaan menjadi :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \quad (2-31)$$

Jika persamaan (2-11) disubstitusikan ke dalam persamaan (2-10) maka :

$$Fs = mv \frac{dv}{ds} \quad (2-32)$$

$$Fs \cdot ds = mv \cdot dv \quad (2-33)$$

Kalau  $v_1$  merupakan kecepatan ketika  $s=s_1$  dan  $v_2$  ketika  $s=s_2$ , maka

$$\int_{s_1}^{s_2} Fs \cdot ds = \int_{v_1}^{v_2} mv \cdot dv \quad (2-34)$$

Integral pada ruas kiri disebut usaha ( $W$ ) yang dilakukan oleh gaya  $F$ , antara titik  $s_1$  dan titik  $s_2$ . Nilai usaha tersebut dapat dihitung apabila komponen  $F_s$  diketahui sebagai fungsi dari  $s$ , atau fungsi lainnya. Sedangkan integral ruas kanan senantiasa dapat dihitung

$$\int_{v_1}^{v_2} mv \cdot dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (2-35)$$

Setengah hasil kali massa partikel dengan kuadrat besar kecepatannya di sebut energy kinetik yang dirumuskan :

$$Ek = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2-36)$$

Keterangan :

Ek adalah energi kinetik ( $kg \frac{m^2}{s^2}$ )

m adalah massa dari benda (kg)

v adalah kecepatan benda ( $\frac{m}{s}$ )

## 2.10 Hipotesa

Pada proses *cold expansion hole*, semakin tinggi kecepatan mandrel semakin merata pula tegangan sisa tekan (*compressive residual stress*) yang dihasilkan. Hal ini dikarenakan semakin tinggi kecepatan mandrel energi yang di hasilkan dan digunakan untuk mendeformasi plastis material akan semakin besar.